

1 Partie A

1 Calcul de v_1 et v_2

$$v_1 = u_1 - 20 = \frac{1}{2}u_0 + 10 - 20 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 - 20 = 15 + 10 - 20 = 5.$$

$$v_2 = u_2 - 20 = \frac{1}{2}u_1 + 10 - 20 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 - 20 = 12,5 + 10 - 20 = 2,5.$$

2 (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Pour tout entier n ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \frac{1}{2}u_n + 10 - 20 = \frac{1}{2}(u_n - 20) = \frac{1}{2}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$.

3 Expression de v_n

Pour tout entier n , $v_n = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

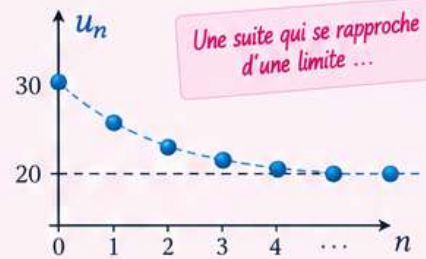
4 Expression de u_n

Pour tout entier n , $u_n = v_n + 20 = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20 = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5 Limite de (u_n)

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$.

La suite (u_n) converge vers 20.



2 Partie B

1 Calcul de w_1 $w_1 = \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}u_0 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 = 22,5 + 15 + 7 = 44,5$.

2 Fonction Python

On complète la fonction afin que son exécution renvoie la valeur du terme w_n .

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        U = U/2 + 10
        W = W/2 + U/2 + 7
    return W
```



Programmer
pour explorer
les suites !

3 Expression de w_n par récurrence

a. Soit la proposition $P(n)$: « pour tout entier naturel n ,

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34. »$$

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $w_0 = 10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 0 + 11 + 34 = 45$, vrai au rang 0.

• **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un rang n , c'est-à-dire

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } w_{n+1} &= \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \\ &= \frac{1}{2} \left[10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 \right] + \frac{1}{2} \left[20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 7 \\ &= 10(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$$

b. Pour tout $n \geq 4$, on admet que : $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.

Comme $n \geq 4$, $0 \leq \frac{10}{n} \leq \frac{10}{4}$, d'où

$$0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{4}$$

et, par somme,

$$34 \leq w_n \leq \frac{10}{n} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$$

Or $11 \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$, donc $34 \leq w_n \leq \frac{10}{n} + 34$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n} = 0$, le théorème d'encadrement donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 34$.

La suite (w_n) converge donc vers 34.

Ainsi, la suite (w_n) admet
pour limite 34.



Les suites : un outil puissant
pour modéliser le monde qui nous entoure !

Raisonner

Modéliser

Explorer

Réussir