

Exercice de synthèse 9

Suites couplées, récurrence et Python

Terminale spécialité maths

Modéliser
Calculer
Démontrer
Conclure !

Deux suites,
une même
quête ...

(u_n)

(w_n)

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        U = U/2 + 10
        W = W/2 + U/2 + 7
    return W
```

Python

Algorithmes

Suites

Raisonnement

1 Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n ,

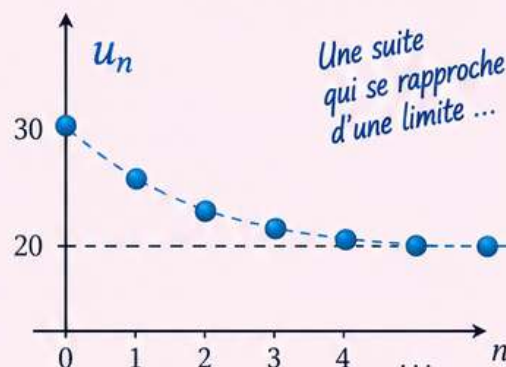
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10.$$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

- 1 Calculer les valeurs exactes de v_1 et v_2 .
- 2 Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- 3 Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
- 4 En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- 5 Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.



2 Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7. \end{cases}$$

- 1 Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée.

On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```
1 def suite(n):
2     U = 30
3     W = 45
4     for i in range(1, n+1):
5         U = U/2 + 10
6         W = W/2 + U/2 + 7
7     return W
```



Python,
un allié pour
les suites !

- 2 L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1 . Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(1) renvoie la valeur du terme w_1 ?

- 3 a. Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$$

- b. On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

(u_n) (w_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 10 \\ w_{n+1} &= \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{aligned}$$

Des suites pour aller plus loin...

Raisonner

Modéliser

Programmer

Réussir