

Exercice de synthèse 13

Corrigé

Suites, probabilités et modèle de reproduction

Terminale spécialité maths

Les maths au service du vivant !

1 Modélisation du développement d'une bactérie

On modélise le développement d'une bactérie avec :

- une probabilité 0,3 de mourir sans descendance,
- une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que la suite (p_n) est définie par

$$\begin{cases} p_0 = 0,3 \\ p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2 \end{cases}$$



2 Premières valeurs et conjectures

2 a Calcul de p_1 et p_2

$$p_1 = 0,3 + 0,7 \times (0,3)^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,363.$$

$$p_2 = 0,3 + 0,7 \times (0,363)^2 \approx 0,3 + 0,7 \times 0,131769 = 0,392.$$

$$p_1 = 0,363$$

$$p_2 \approx 0,392$$

Interprétation

- $p_1 \approx 0,363$: probabilité d'obtenir au plus 1 descendance.
- $p_2 \approx 0,392$: probabilité d'obtenir au plus 2 descendances.

2 b Probabilité d'au moins 11 générations

Obtenir au moins 11 générations signifie obtenir strictement plus de 10 descendances.

On calcule (à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableau de valeurs) : $p_{10} \approx 0,500$ (plus précisément 0,499999999...).

$$1 - p_{10} \approx 0,500 \approx 0,500 \times 10^{-3} \text{ près.}$$

2 c Conjectures

- Les valeurs p_n semblent croissantes.
- Elles semblent se rapprocher de 0,5.
- On conjecture que (p_n) est croissante et converge vers 0,5.

3 Étude théorique de la suite (p_n)

3 a Récurrence : $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$

- **Initialisation** : $p_0 = 0,3 \in [0 ; 0,5]$ et $p_1 = 0,3 + 0,7 \times (0,3)^2 = 0,363 \in [0 ; 0,5]$.
Donc $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0,5$.

- **Hérédité** : on suppose la propriété P vraie au rang n ($n \in \mathbb{N}$ fixé), c'est-à-dire $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc

$$0 \leq p_n^2 \leq p_{n+1}^2 \leq 0,5^2 = 0,25.$$

En multipliant par 0,7 (nombre positif) :

$$0 \leq 0,7p_n^2 \leq 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,175.$$

En ajoutant 0,3 :

$$0,3 \leq 0,3 + 0,7p_n^2 \leq 0,3 + 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,475.$$

Donc $0 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,5$.

L'hérédité est prouvée.

- **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

La suite (p_n) est croissante et majorée par 0,5.

3 b Convergence

La suite (p_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente (théorème de convergence des suites monotones).

3 c Détermination de la limite

$$\text{On note } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n.$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,3 + 0,7x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la suite (p_n) converge vers ℓ .

D'après le théorème du point fixe, on a $f(\ell) = \ell$, donc

$$0,3 + 0,7\ell^2 = \ell \Leftrightarrow 0,7\ell^2 - \ell + 0,3 = 0.$$

On résout :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 0,16.$$

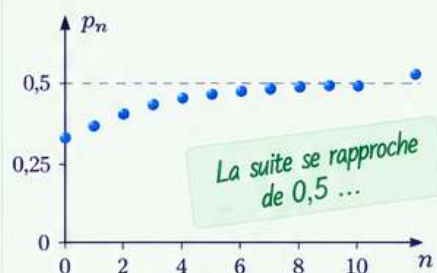
$$\ell = \frac{1 \pm 0,4}{1,4}, \text{ donc } \ell = 1 \text{ ou } \ell = \frac{3}{7}.$$

Comme $0 \leq p_n \leq 0,5$, on obtient

$$\ell = \frac{3}{7} \approx 0,429.$$

Quelques valeurs de p_n

n	0	1	2	3	4	5	10
p_n	0,300	0,363	0,392	0,408	0,417	0,423	0,500



4 Un programme Python

4 a Rôle de l'opérateur .append

L'instruction `L.append(p)` ajoute la valeur p à la fin de la liste L . Elle permet de stocker successivement les termes de la suite.

Une liste pour suivre l'évolution de la suite !

4 b Fonction complétée

```
1 def suite(n):
2     p = 0.3
3     L = [p]
4     for i in range(1, n):
5         p = 0.3 + 0.7*p**2
6         L.append(p)
7     return L
```

Cette fonction retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite (p_n) .

Python : un outil puissant pour explorer les suites !

Mathématiques et biologie : une même curiosité pour le monde qui nous entoure !

Observer
Comprendre
Modéliser
Aller plus loin ...