

Exercice de synthèse 13

Suites, probabilités et modèle de reproduction

Terminale spécialité maths

Les maths décrivent aussi le monde réel !

Modéliser
Comprendre
Raisonner
Démontrer
Programmer

Des suites au service de la science !

1 Modélisation du développement d'une bactérie

On s'intéresse au développement d'une bactérie. On modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie par

$$\begin{cases} p_0 = 0,3 \\ p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2 \end{cases}$$



2 Premières valeurs et conjectures

2 a Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

2 b Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ? Justifier.

2 c Formuler des conjectures, en se justifiant, sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

Pour les questions 2 b) et 2 c) on pourra utiliser un tableau de valeurs ou un programme Python de la calculatrice pour se justifier.



3 Étude théorique de la suite (p_n)

3 a Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

3 b En déduire que la suite (p_n) est convergente.

3 c On appelle ℓ la limite de la suite (p_n) .

i Justifier que ℓ est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

ii Déterminer alors la limite de la suite (p_n) .

Rigueur
et démonstration
pour conclure !

4 Un programme Python

La fonction, écrite en Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

4 a Que fait l'opérateur « . append » sur la liste « L » ?

4 b Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4, 5 de façon à ce que la fonction `suite(n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n):
2     p = ...
3     L = [p]
4     for i in range(...):
5         p = ...
6         L.append(p)
7     return L
```



Python :
un allié
pour expérimenter
et conjecturer !

Des modèles mathématiques
pour comprendre le vivant ...

Mathématiques
et sciences :
même curiosité !